Universidad Simón Bolívar
Departamento de Computación y
Tecnología de la Información
Estructuras Discretas para el Análisis de Algoritmos
Ci-2525k.

Solución Prática 4

1. Evalúe las siguientes expresiones:

   a. $(\Delta + I)(\Delta - I)(x^2 - 1)$

   Solución: Primero resolveremos esta expresión para cualquier función f evaluada en un punto x cualquiera:
   $(\Delta + I)(\Delta - I)(f)(x) =$
   $(\Delta + I)[\Delta(f(x)) - I(f(x))] =$
   $(\Delta + I)[f(x+1) - f(x) - f(x)] =$
   $(\Delta + I)(f(x+1) - 2f(x)) =$
   $\Delta(f(x+1) - 2f(x)) + I(f(x+1) - 2f(x)) =$
   $f(x+2) - 2f(x+1) - (f(x+1) - 2f(x)) + f(x+1) - 2f(x) =$
   $f(x+2) - 2f(x+1) - f(x+1) + 2f(x) + f(x+1) - 2f(x) =$
   $f(x+2) - 2f(x+1)$

   Hacemos $f(x) = x^2 - 1$, y tenemos que:
   $f(x+2) - 2f(x+1) =$
   $(x+2)^2 - 1 - 2((x+1)^2 - 1) =$
   $x^2 + 4x + 4 - 1 - 2(x^2 + 2x + 1 - 1) =$
   $x^2 + 4x + 3 - 2x^2 - 4x =$
   $-x^2 + 3$
   Por lo tanto $(\Delta + I)(\Delta - I)(x^2 - 1) = -x^2 + 3$

   b. $(E - 2I)(E - I)(2^x + x)$

   Solución: Primero resolveremos esta expresión para cualquier función f evaluada en un punto x cualquiera:
   $(E - 2I)(E - I)(f)(x) =$
   $(E - 2I)[E(f(x)) - I(f(x))] =$
   $(E - 2I)(f(x+1) - f(x)) =$
   $E(f(x+1) - f(x)) - 2I(f(x+1) - f(x)) =$
   $f(x+2) - f(x+1) - 2f(x+1) + 2f(x) =$

$f(x+2) - 3f(x+1) + 2f(x)$

Hacemos $f(x) = 2^x + x$, y tenemos que:
$f(x+2) - 3f(x+1) + 2f(x) =$
$2^{x+2} + x + 2 - 3(2^{x+1} + x + 1) + 2(2^x + x) =$
$2^{x+2} + x + 2 - 3(2^{x+1}) - 3x - 3 + 2(2^x) + 2x =$
$2^{x+2} + 2 - 3(2^{x+1}) - 3 + 2^{x+1} =$
$2^{x+2} - 2(2^{x+1}) - 1 =$
$2^{x+2} - 2^{x+2} - 1 =$
-1
Por lo tanto $(E - 2I)(E - I)(2^x + x) = -1$

c. $(E + 2I)(2sen(2x))$
Solución: Primero resolveremos esta expresión para cualquier función f evaluada en un punto x cualquiera:
$(E + 2I)(f)(x) =$
$E(f(x)) + 2I(f(x)) =$
$f(x+1) + 2f(x)$

Hacemos $f(x) = 2sen(2x)$, y tenemos que:
$f(x+1) + 2f(x) =$
$2(sen(2(x+1)) + 2(2sen(2x)) =$
$2sen(2x+2) + 4sen(2x)$
Por lo tanto $(E + 2I)(2sen(2x)) = 2sen(2x+2) + 4sen(2x)$

2. Determine la primera diferencia finita de

a.- $33x^{(3)} + 2x^{(-2)}$
Solución: $\Delta(33x^{(3)} + 2x^{(-2)}) =$
$33(x+1)^{(3)} + 2(x+1)^{(-2)} - 33x^{(3)} - 2x^{(-2)}$

b.- $x2^{x+1}$
Solución: $\Delta(x2^{x+1}) =$
$(x+1)2^{x+2} - x2^{x+1} =$
$x2^{x+2} + 2^{x+2} - x2^{x+1} =$
$2(x2^{x+1}) - x2^{x+1} + 2^{x+2} =$
$x2^{x+1} + 2^{x+2} =$
$x2^{x+1} + 2(2^{x+1}) =$
$2^{x+1}(x+2)$

c.- $\frac{sen(2x)}{x+1}$

Solución: $\Delta(\frac{sen(2x)}{x+1}) =$
$\frac{sen(2(x+1))}{(x+1)+1} - \frac{sen(2x)}{x+1} =$
$\frac{sen(2x+2)}{x+2} - \frac{sen(2x)}{x+1}$

3. Encuentre los polinomios asociados a las siguientes funciones factoriales:

a.- $x^{(3)} + 1$

Solución: Por definición sabemos que

$$x^{(m)} \begin{cases} x(x-h)(x-2h)...(x-(m-1)h) & \text{si } m \geq 1 \\ 1 & \text{si } m = 0 \end{cases}$$

Aplicando la definición y $h = 1$ tenemos que:
$x^{(3)} + 1 = x(x-1)(x-2) + 1 = x(x^2 - 3x + 2) + 1 = x^3 - 3x^2 + 2x + 1$

b.- $x^{(2)} + x^{(4)}$

Solución: De forma análoga al ejercicio anterior:
$x^{(2)} + x^{(4)} = x(x-1) + x(x-1)(x-2)(x-3) = x^2 - x + (x^3 - 3x^2 + 2x)(x-3) =$
$x^2 - x + x^4 - 3x^3 - 3x^3 + 9x^2 + 2x^2 - 6x = x^4 - 6x^3 + 12x^2 - 7x$

4. Utilice las siguientes fórmulas,

$$sen(x) - sen(y) = 2sen(\frac{x-y}{2})cos(\frac{x+y}{2})$$

$$cos(x) - cos(y) = -2sen(\frac{x-y}{2})sen(\frac{x+y}{2})$$

y determine las primeras diferencias de $sen(ax)$ y $cos(ax)$.

Solución: (1).- Comenzaremos con la primera diferencia de $sen(ax)$:
$\Delta(sen(ax)) = sen(a(x+1)) - sen(ax)$
Consideremos el siguiente cambio de variables: $x = a(x+1)$ y $y = ax$. Del enunciado sabemos que:

$$sen(x) - sen(y) = 2sen(\frac{x-y}{2})cos(\frac{x+y}{2}) = 2sen(\frac{a(x+1)-ax}{2})cos(\frac{a(x+1)+ax}{2}) =$$

$$2sen(\frac{ax+a-ax}{2})cos(\frac{ax+a+ax}{2}) = 2sen(\frac{a}{2})cos(\frac{2ax+a}{2}) = 2sen(\frac{a}{2})cos(a(x+\frac{1}{2}))$$

(2).- La primera diferencia de $cos(ax)$:

$\Delta(cos(ax)) = cos(a(x+1)) - cos(ax)$

Consideremos el siguiente cambio de variables: $x = a(x+1)$ y $y = ax$. Del enunciado sabemos que:

$$cos(x) - cos(y) = -2sen(\frac{x-y}{2})sen(\frac{x+y}{2}) = -2sen(\frac{a(x+1)-ax}{2})sen(\frac{a(x+1)+ax}{2}) =$$

$$-2sen(\frac{ax+a-ax}{2})sen(\frac{ax+a+ax}{2}) = -2sen(\frac{a}{2})sen(\frac{2ax+a}{2}) = -2sen(\frac{a}{2})sen(a(x+\frac{1}{2}))$$

5. Utilice que $\Delta^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}(-1)^{n-i}E^i$ y verifique que $(-1)^n\Delta^n f(0) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}(-1)^i f(i)$

   Solución:

   $\Delta^n = (E-I)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}(-1)^{n-i}E^i$

   Multiplicando por $f(x)$ en ambos lados de la igualdad:

   $\Delta^n f(x) = (E-I)^n f(x) = \sum_{i=0}^{n}(\binom{n}{i}(-1)^{n-i}E^i)f(x)$

   Por propiedades de la sumatoria:

   $\sum_{i=0}^{n}(\binom{n}{i}(-1)^{n-i}E^i)f(x) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}(-1)^{n-i}(E^i f(x)) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}(-1)^{n-i}f(x+i)$

   Evaluando en f en 0:

   $\Delta^n f(0) = (-1)^n \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}(-1)^i f(i) \Rightarrow (-1)^n\Delta^n f(0) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}(-1)^i f(i)$

6. Use la fórmula de Gregory-Newton para probar que la n-ésima diferencia finita de un polinomio de grado n es $a_0 n!$ donde a_0 es el coeficiente del término n-ésimo en el polinomio.
   Solución: Se deja la solución de este ejercicio al lector.

7. Los números de Stirling de la segunda clase cuentan el número de particiones de un conjunto de n elementos en k bloques (sin bloques vacíos). Otra forma de definirlos es como los coeficientes de un polinomio factorial para la expresión x^n , esto es:

$$x^n = \sum_{k=1}^{n} S_k(n)x^{(k)}$$

   Exprese x^4 como potencias factoriales para hallar el número de particiones en 1,2,3,4 bloques que posee un conjunto de 4 elementos.
   Solución: