UNIVERSIDAD SIMÓN BOLÍVAR
Departamento de Computación y
Tecnología de la Información
Estructuras Discretas III

Práctica 5 semana 7
Sartenejas, 22 de febrero de 2011

1. Determine las secuencias de longitud n formadas con elementos del conjunto $\{0, 1, 2\}$ que tienen exactamente dos ceros.

   Solución: Las cadenas de longitud n formadas con los elementos del conjunto $\{0, 1, 2\}$ se parten disjuntamente en las que terminan en 0, en 1 o en 2. Por el principio de adición, para contar estas cadenas basta contar estos tres conjuntos.
   Como las cadenas que terminan en 1 se les puede obtener de las cadenas de longitud $n-1$ agregándole un 1 al final, se tiene que de ellas hay a_{n-1}. El mismo razonamiento lo utilizamos para las cadenas que terminan en 2. Hasta el momento tenemos:

   $$a_n = a_{n-1} + a_{n-1} + x = 2a_{n-1} + x,$$

   Donde x representa el número de cadenas que terminan en cero.
   Nos falta analizar el caso en que las cadenas terminan en cero. Estas no se pueden expresar en función de los terminos anteriores porque violaríamos la la condición de que la cadena tenga exactamente dos ceros. Por lo tanto vamos a contar las cadenas con las herramientas que ya conocemos.

   Una cadena de longitud n que termina en 0 es de la forma $\{* * ... * 0\}$ con $n-1$ asteriscos. Los asteriscos representan 1 o 2. Sin embargo, para que la cadena sea válida, exactamente uno de esos asteriscos debe ser 0. Esto puede ocurrir de $n-1$ formas : $\{0 * ... * 0\}$,$\{*0... * 0\}$ ... $\{* * .., 00\}$. Por último, cada una de estas cadenas se compone de 2^{n-2} elementos.

   En conclusión, tenemos que $x = (n-1)2^{n-2}$, por lo que la relación de recurrencia que buscamos es:

   $$a_n = 2a_{n-1} + (n-1)2^{n-2}$$

   Las condiciones de borde para este caso son: $a_1 = 0$, $a_2 = 1$ (la cadena 00).
   Como ejercicio adicional podemos ver como funciona esta ecuación para el caso a_3.
   Según la relación de recurrencia tenemos que: $a_3 = 2(a_2) + (3-1)2^{3-2} = 2(1) + 2(2) = 2 + 4 = 6$. Efectivamente, hay 6 cadenas de longitud tres con exactamente dos ceros, estas son $001, 002, 010, 020, 100, 200$.

2. Encuentre una relación de recurrencia para los siguientes problemas, indique las condiciones de borde en cada caso.

   a.- Calcular el número de formas de distribuir n objetos distintos en 5 cajas distintas. **Solución:** El número de estas distribuciones es igual a la cantidad de distribuciones de $n-1$

objetos en 5 cajas, pero por cada una de estas distribuciones debemos agregárle 5 distribuciones correspondientes al elemento n. Por lo tanto $a_n = 5a_{n-1}$, con $a_1 = 5, a_2 = 25$. Nótese que estas distribuciones es igual a la cantidad de funciones que existen de un conjunto de n elementos a un conjunto de 5 elementos. El lector podrá verificar fácilmente que la solución a esta relación de recurrencia es $a_n = 5^{n-1}5$, con $n \geq 1$.

b.- Calcular el número de formas para subir una escalera de n peldaños si puede dar pasos de un escalón, dos escalones o tres escalones.

Solución: Sea a_n el número de formas de subir una escalera de n peldaños con las condiciones dadas. El conjunto de las distintas formas de subir esta escalera se puede partir disjuntamente en tres conjuntos: (i) las formas de subir la escalera que terminan con un paso, (ii) las formas de subir la escalera que terminan con dos paso y (iii) las formas de subir la escalera que terminan con tres pasos. Por el principio de la adición, para contar las formas totales basta con contar estos tres conjuntos.

En principio, las formas de subir una escalera de n peldaños que terminan en un paso se pueden contar a partir de las formas de subir una escalera de $n-1$ peldaños agregándole un paso al final.

Por otra parte, las formas de subir una escalera de n peldaños que terminan en dos pasos se pueden contar a partir de las formas de subir una escalera de $n-2$ peldaños agregándole dos pasos al final.

Por último, las formas de subir una escalera de n peldaños que terminan en tres pasos se pueden contar a partir de las formas de subir una escalera de $n-3$ peldaños agregándole tres pasos al final.

En conclusión, la relación de recurrencia que buscamos es:

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3}$$

Las condiciones de borde son:

Condición	Trayectorias
$a_1 = 1$	1
$a_2 = 2$	11, 02
$a_3 = 4$	1111,102,021,003

c.- Calcular el número de secuencias de n dígitos en el conjunto {0,1} que no contenga dos 1ńs consecutivos.

Solución: Sea a_n el número de cadena de longitud n que no tienen dos 1ńs consecutivos. Este conjunto lo podemos partir en dos conjuntos disjuntos: el de las cadenas que terminan en 0 y el de las cadenas que terminan en 1. Por el principio de adición sabemos que si contamos estos dos conjuntos obtendremos el conjunto total. Las cadenas que terminan en cero se pueden obtener a partir de las cadenas de longitud $n-1$ agregándole un cero. Las cadenas que terminan en uno se pueden obtener a partir de las cadenas de longitud $n-2$ agregándole la cadena 01 al final. En conclusión tenemos que:

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$$

Las condiciones de borde son $a_1 = 2$ (0,1) y $a_2 = 3$ (00,01,10)

d.- Como en c.- considerando secuencias de n dígitos formadas con elementos del conjunto {0,1,2}.

Solución: Procedemos igual que en c.- con la diferencia de que ahora partimos el conjunto

total en tres conjuntos: el de las cadenas que terminan en 0, el de las cadenas que terminan en 1 y el de las cadenas que terminan en 2.
Al igual que en c.- las cadenas que terminan en cero se pueden obtener a partir de las cadenas de longitud $n-1$ agregándole un cero y las cadenas que terminan en dos se pueden obtener a partir de las cadenas de longitud $n-1$ agregándole un dos. Sin embargo, las cadenas que terminan en 1 se obtienen a partir de las cadenas de longitud $n-1$, esta vez agregándole un 1 o un 0.
Por lo tanto:

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-1} + 2a_{n-2} = 2a_{n-1} + 2a_{n-2} = 2(a_{n-1} + a_{n-2})$$

Las condiciones de borde son $a_1 = 3(0, 1, 2), a_2 = 8(00, 01, 10, 02, 20, 22, 12, 21)$

e.- Calcular el número de integrantes de una población de conejos al n-ésimo mes, la cual se inició con dos conejos (macho y hembra) recién nacidos y los cuales están en condiciones de reproducirse al tener más de un mes de nacidos. Cada mes los que están en condiciones de reproducirse tienen un par de conejos macho y hembra respectivamente.
Solución: Por el enunciado del problema sabemos que la población inicial es $a_0 = 2$ (una pareja de conejos). Más aún, al inicio del primer mes la población seguirá siendo de dos conejos, es decir $a_1 = 2$, ya que aún los conejos no se han reproducido. Sin embargo, para el segundo mes ya la pareja inicial engendró una pareja de conejos con lo que para el segundo mes hay 4 conejos en total, es decir $a_2 = 4$. En el tercer mes la pareja inicial engendra otra pareja de conejos, mientras que la pareja del segundo mes aún no es fértil, por lo tanto $a_3 = 6$. Este patrón se repetirá n veces.
Sea a_n número de conejos en la población en el mes n. La relación de recurrencia que buscamos es:

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$$

f.- Calcular el número de formas de seleccionar 4 elementos de un conjunto de n elementos.
Solución: Sea a_n el número de formas de seleccionar cuatro elementos de un conjunto de n elementos. Sea a_{n-1} el número de formas de seleccionar cuatro elementos de un conjunto de $n-1$ elementos. Entonces, a_n se puede expresar como la suma de a_{n-1} más las combinaciones de los elementos que faltan, es decir: $a_n = a_{n-1} + \binom{n-1}{3}$

g.- Calcular el número de formas de distribuir n objetos distintos en k cajas indistinguibles sin cajas vacías.
Solución: Estos son los números de Stirling de segunda clase.

3. Use el método de la suma para resolver las siguientes recurrencias:

$a)$ $a_n = a_{n-1} + 2n$, $a_1 = 1$

$a_n = 1 + \sum_{k=1}^{n} 2k - 2$

$a_n = 2\sum_{k=1}^{n} -1$

$a_n = 2\frac{n(n+1)}{2} - 1$

$= n(n+1) - 1$

$b)$ $a_n = 3a_{n-1} + 5(7^n)$, $a_0 = 2$

$a_n = 3^n a_0 + 3^{n-1}5(7^1) + 3^{n-2}5(7^2) + \ldots + 3^{n-n}5(7^n)$

$a_n = 3^n a_0 + \sum_{k=1}^{n} 3^{n-k}5(7^k)$

$= 3^n a_0 + 3^n 5 \sum_{k=1}^{n} (\frac{7}{3})^k$

$3^n 2 + 3^n 5 \frac{1-(\frac{7}{3})^{n+1}}{1-\frac{7}{3}} - 3^n 5$